

ΜΑΥ611: Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι (2025-26) - Ιούνιος 2026

Ημερομηνία: 16/6/2026

Διάρκεια: 3 ώρες

Απαντήστε σε 5 από τα 6 θέματα.

1. α) Προσδιορίστε την εικόνα $f(S)$ του σύνολου $S = \{z \in \mathbb{C} : e^{1/2} \leq |z| \leq e^2, -\frac{\pi}{8} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{8}\}$ κάτω από την απεικόνιση $f(z) = i\text{Log}(iz^2)$. Σχεδιάστε πρόχειρα τα $S, f(S)$.

β) Βρείτε τη μέγιστη τιμή της $|f|$ στο S , καθώς και τα σημεία στα οποία αυτή λαμβάνεται. (1, 5 + 1 μον.)

2. α) Βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}e^{-|z|^2}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της στα σημεία αυτά.

β) Έστω $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους. Αν η $f(x + iy) = h(x, y)^3 + ih(x, y)$ είναι ακέραια συνάρτηση, δείξτε ότι η h είναι σταθερή. (1 + 1 μον.)

3. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $1 + i$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης; (1, 5 μον.)

4. Σχεδιάστε πρόχειρα την προσανατολισμένη καμπύλη γ και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το αντίστοιχο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

α) $\int_{\gamma} ze^z + \bar{z} dz$, όπου $\gamma = [-1, i] \oplus [i, 1 - i]$.

β) $\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{(z-1+2i)(z-i)} dz$, όπου $\gamma(t) = \begin{cases} i + e^{i(t-\frac{\pi}{2})}, & \text{αν } t \in [0, 2\pi] \\ -2i + 2e^{-i(t-\frac{\pi}{2})}, & \text{αν } t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$ (1, 5 + 1, 5 μον.)

5. α) Έστω $r > 0$ και f συνάρτηση ολόμορφη σε ένα ανοικτό $D \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει το $\overline{D(0, r)}$. Αν $M = \max\{f(z) : |z| = r\}$, δείξτε ότι $|f^{(n)}(0)| \leq n!Mr^{-n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Εξηγήστε έπειτα πώς από αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει ότι αν η f είναι ακέραια και φραγμένη, τότε είναι υποχρεωτικά σταθερή.

β) Δείξτε ότι αν η f είναι ακέραια και τέτοια ώστε $\text{Re}(f(z)) > 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή. (1 + 1 μον.)

6. α) Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$ και $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, δείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\tilde{f}(z) = f(z)$ για κάθε $z \in D \setminus \{z_0\}$.

β) Βρείτε και ταξινομήστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της συνάρτησης $f(z) = \frac{\cos(i(z-1/2)) - 1}{(e^{2z} - e)^2}$. (0, 5 + 1, 5 μον.)

Αιτιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!